## **Solusi Relasi Rekuren**

**Definisi 1**

Relasi rekuren linear homogen derajat *k* dengan koefisien konstan merupakan relasi rekuren dari bentuk *an = c1an-1* + *c2an-2* + … + *ckan-k* dimana *c1, c2, …, ck* merupakan bilangan real, dan *ck* 0.

**Contoh 2**

Relasi rekuren *Pn* = (1.11)*Pn-1* adalah relasi rekuren linear homogen satu derajat. Relasi rekuren *fn = fn -1 + fn -2* adalah relasi rekuren linear homogen dua derajat. Relasi rekuren *an* = *an-5* adalah relasi rekuren linear homogen lima derajat.

**Contoh 3**

Relasi rekuren *an* = *an-1 + a2n-2* tidak linear. Relasi rekuren *Hn* = 2*Hn-1* + 1 tidak homogen. Relasi rekuren *Bn* = *nBn-1* tidak memiliki koefisien konstan.

**Teorema 1**

Misalkan *c1* dan *c2* adalah bilangan real. *r*2 – *c1r – c2* = 0 mempunyai dua akar berbeda *r1* dan *r2*. Maka sequence {*an*} adalah solusi dari relasi rekuren *an* = *c1an-1* + *c2an-2* jika dan hanya jika

*an* = *1r1n* + *2r2n* untuk *n =* 0, 1, 2, …, dimana *1*dan *2* konstanta.

**Teorema 2**

Misalkan *c*1 dan *c*2 adalah bilangan real dengan *c*2 ≠ 0. Ditunjukkan bahwa *r*2 – *c1r – c2* = 0 hanya mempunyai satu akar *r0*. Maka sequence {*an*} adalah solusi dari relasi rekuren *an* = *c*1*an*-1+ *c2an-2* jika dan hanya jika *an* = α1*r*0*n* + α2*nr0n* untuk *n =* 0, 1, 2, …, dimana *1*dan *2* konstanta.

**Contoh 4**

Apakah solusi dari relasi rekuren *an* = *an-1* + *2an-2* dengan initial condition *a0* = 2 dan *a1* = 7 ?

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaian:

Berdasarkan teorema 1, misalkan: *r*2 – *c1r – c2* = 0 …… (1)

*an* = *c1an-1* + *c2an-2* …… (2)

*an* = α1*r1n* + α2*r2n* …… (3)

1. Dari persamaan *an* = *an-1* + *2an-2*, berarti *c*1 = 1 dan *c*2 = 2.
2. Substitusi nilai *c*1 dan *c*2 ke persamaan (1) menjadi *r2 – r* – 2 = 0 …… (4).
3. Mencari akar-akar dari persamaan (4):

*r2 – r* – 2 = 0

(*r* – 2) (*r* + 1) = 0

(*r* – 2) = 0 atau (*r* + 1) = 0

*r* = 2 atau *r* = – 1

Sehingga didapat akar-akar persamaan (4) yaitu *r*1 = 2 dan *r*2 = –1.

1. Substitusi nilai *r*1 dan *r*2 ke persamaan (3) menjadi *an* = 12*n* + 2(*–*1)*n* …… (5)
2. Substitusi initial condition *a0* = 2 dan *a1* = 7 ke persamaan (5) menjadi

*a0* = α1 + α2 = 2 …… (6)

*a1* = α1 ⋅ 2 + α2 ⋅ (*–*1) = 7 …… (7)

1. Selesaikan persamaan (6) dan (7):

α1 + α2 = 2

2α1 – α2 = 7 +

3α1 = 9

α1 = 3 🡪 α2 = *–*1

Sehingga didapat nilai α1 = 3 dan α2 = *–*1.

1. Substitusi nilai α1 dan α2 ke persamaan (3) menjadi *an = 3 2n* *–* (*–1*)*n*.

Jadi, solusi dari relasi rekuren *an* = *an-1* + *2an-2* dengan initial condition *a0* = 2 dan *a1* = 7 adalah sequence {*an*} dengan *an = 3 2n* *–* (*–1*)*n*.

## **Soal-soal Latihan bab VI**

6.1 Tentukan solusi dari relasi rekuren: *an* = 6*an-1 –* *9an-2*

dengan initial condition: *a0* = 1 dan *a1* = 6.

6.2 Tentukan solusi dari relasi rekuren: *an* = *–* 3*an-1 –* 3*an-2* *–* *an-3*

dengan initial condition: *a0* = 1, *a*1 = *–* 2, dan *a*2 = *–* 1.

6.3 Tentukan solusi dari relasi rekuren: *an* = 6*an-1 –* 11*an-2* *+* 6*an-3*

dengan initial condition: *a0* = 2, *a*1 = 5, dan *a*2 = 15.

**Pembahasan:**

6.1 Dari persamaan *an* = 6*an-1 –* *9an-2*, berarti *c*1 = 6 dan *c*2 = *–9*.

Lalu*, r2* – 6*r* + 9 = 0

(*r* – 3) (*r* – 3) = 0

Satu-satunya akar dari persamaan tersebut adalah *r* = 3.

Lalu, *an* = 13*n* + *2n3n­*(Teorema 2)

Berdasarkan initial condition, maka:

*a0* = 1 = α1

*a1* = 6 = α1 ⋅ 3 + α2 ⋅ 3

Karena α1 = 1 🡪 α2 = 1

Penyelesaian dua persamaan tersebut adalah α1 = 1 dan α2 = 1.

Sehingga, solusi untuk relasi rekuren dan initial condition di atas adalah sequence {*an*} dengan *an =* 3*n* + *n*3*n*.

6.2 Persamaan karakteristik dari relasi rekuren di atas adalah *r3 +* 3*r2 +* 3*r* + 1 = 0.

Karena *r3 +* 3*r2 +* 3*r* + 1 = (*r* + 1)3 hanya memiliki 1 akar *r* = *–*1 dari tiga jenis persamaan karakteristik.

Penyelesaian untuk relasi rekuren tersebut adalah:

*an* = 1,0(*–*1)*n* + 1,1*n*(*–*1)*n* + 1,2*n2*(*–*1)*n*(Teorema 2)

Untuk menentukan konstanta 1,0,1,1, dan 1,2, gunakan initial condition sehingga

0 = 1 = 1,0

1 = *–*2 = *–*1,0 *–*1,1 *–*1,2

2 = *–*1 = 1,0 + 21,1 +1,2

Solusi dari ketiga persamaan tersebut adalah 1,0 = 1, 1,1 = 3, dan 1,2 = *–*2.

Sehingga, solusi khusus untuk relasi rekuren ini dan initial conditionnya adalah sequence {*an*} dengan *an* = (1 + 3*n* – 2*n2*)( –1)*n*

6.3 Persamaan karakteristik dari relasi rekuren di atas adalah *r3 –* 6*r2 +* 11*r* *–* 6 = 0.

Karena *r3 –* 6*r2 +* 11*r* *–* 6 = (*r* – 1) (*r* – 2) (*r* – 3), maka kkar dari persamaan ini adalah *r* = 1, *r* = 2, dan *r* = 3.

Kemudian,

*an* = *a*1 . 1*n* + *a*2 . 2*n* + *a*3 . 3*n*

Berdasarkan initial condition, maka:

*a*0 = 2 = *a*1 + *a*2 + *a*3,

*a*1 = 5 = *a*1 + *a*2 . 2 + *a*3 . 3,

*a*2 = 15 = *a*1 + *a*2 . 4 + *a*3 . 9,

Penyelesaian tiga persamaan tersebut adalah α1 = 1 dan α2 = –1, dan α3 = 2.

Sehingga, solusi khusus untuk relasi rekuren ini dan initial conditionnya adalah sequence {*an*} dengan *an* = 1 – 2*n*  + 2.3*n*